



TITLE:

対称空間の数え上げ問題(代数群とその周辺)

AUTHOR(S):

De Concini, Corrado; 宇澤, 達

CITATION:

De Concini, Corrado ...[et al]. 対称空間の数え上げ問題(代数群とその周辺). 数理解析研究所講究録 1984, 512: 148-156

ISSUE DATE:

1984-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/98334>

RIGHT:

対称空曲の数え上げ問題

n-2 大 II Corrado De Concini

問題 Schubert [3] が計算した次の数を正当化せよ。

1. 一般の位置にある 9 つの 2 次曲面と接する 2 次曲面の数 $\dots 666,841,088$.
2. 一般の位置にある 12 の 2 次曲面と接する twisted cubics の数 $\dots 5,819,539,783,680$.

2 次曲面, twisted cubics の全体はそれぞれ, $SL(4)/N(SO(4))$, $GL_4/N(GL_2)$ であって, 等質空曲になっている。従って, 数え上げ幾何の問題を次の様に代数群の言葉で定式化することができる。

G : \mathbb{C} 上の連結代数群。

H : G の閉代数部分群。

$X = G/H$, $n \equiv \dim X$ とおく。

V_1, \dots, V_k と X の部分多様体の集まりで, $\sum \text{codim } V_i = n$ となるものが与えられたものとする。Kleimanの定理[2]によれば, $g_2, \dots, g_k \in G$ を generic にとれば, $V_1 \cap g_2 V_2 \cap \dots \cap g_k V_k$ の元の個数は一定となる。この数を求めることが一般の数え上げ幾何の問題となる。

G/H が compact であれば, 問題は G/H のコホモロジー環の計算に帰着する。

G/H が non-compact である時にどのような困難が生ずるかを一番簡単な例でみることにする。

$G = SL_3(\mathbb{C})$, $H = N(SO(3, \mathbb{C}))$ とすれば, $X = G/H$ は非特異2次曲線の空間 (= 非特異 3×3 複素対称行列の全体。) になる。

この pair に対して, 次の問題:

conic C に対して,

$S_C \equiv \{ C \text{ と接する n.s. conics } \}$ と定めた時,

conics C_1, \dots, C_5 を generic にとった時,

$|\bigcap_{i=1}^5 S_{C_i}|$ はいくつか?

を尋ねる。

Steinerの失敗

X を $\mathbb{P}^5 = \{3 \times 3 \text{ 対称行列}\} / \text{スカラー倍}$ の open subset
 ($\{ \text{対称行列 } A; \det A \neq 0 \} / \mathbb{C}^*$) とみる。

S_c の \mathbb{P}^5 内の閉包 $\overline{S_c}$ は \mathbb{P}^5 内の次数 6 の超曲面となる。
 ここで早速 Bezout の定理を用いれば, $|\# \bigcap_{i=1}^5 S_{c_i}| = 6^5$
 となりそうである。これが Steiner の与えた数である。

但, この方法には次に見る様に, 弱点がある。

L_1, \dots, L_5 を \mathbb{P}^2 内の直線として,

$$S_{L_i} = \{ \mathbb{P}^2 \text{ 内の n.s. conics で } L_i \text{ に接するもの} \}$$

$|\bigcap_{i=1}^5 S_{L_i}|$ を求めてみる。

1. S_{L_i} の \mathbb{P}^5 内での閉包を $\overline{S_{L_i}}$ とすれば, $\overline{S_{L_i}}$ は次数
 2 の超平面になる。従って再び Bezout の定理
 を心理的根拠とすれば, $|\bigcap_{i=1}^5 \overline{S_{L_i}}| = 2^5$ となり
 そうである。
2. 一方, duality によつて, 5本の generic な直線
 に接する n.s. conics の数は, generic な点を通
 する n.s. conics の数に等しくなる。一点を通
 する conics の全体は \mathbb{P}^5 の超平面である。従つて,
 再び Bezout の定理より, $|\bigcap_{i=1}^5 S_{L_i}| = 1$ となる。
 実はこれが正しい数になる。

1 の論法では何故 Bezout の定理が有効に機能しないの
 であろうか? その背景には次の様な事情がある。 \mathbb{P}^5 を,

パラメータ空間ととったときは、2次曲線として次の三種類を考えることになる。

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Circle} & \text{Cross} & \text{Double line} \\
 X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 = 0 & X_0^2 + X_1^2 = 0 & X_0^2 = 0
 \end{array}$$

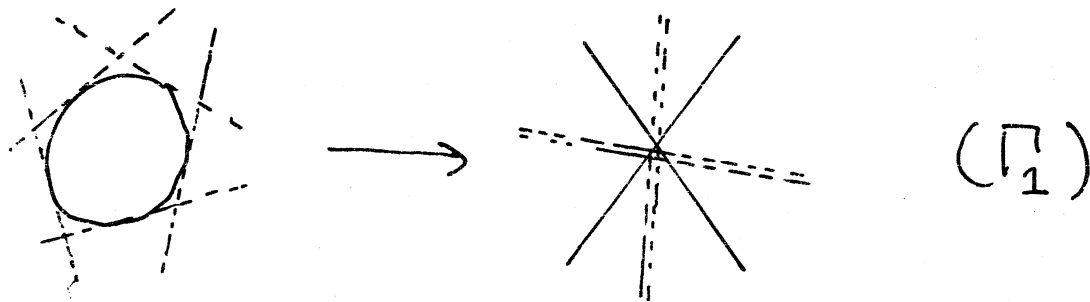
\mathbb{P}^5 の中で S_L の束包をとると、常に二重直線全体 $\{=\}$ を含む。従って、 $\bigcap_{i=1}^5 \overline{S_{L_i}} \supset \{=\}$ であって、Bezoutの定理を適用することは意味をなさない。

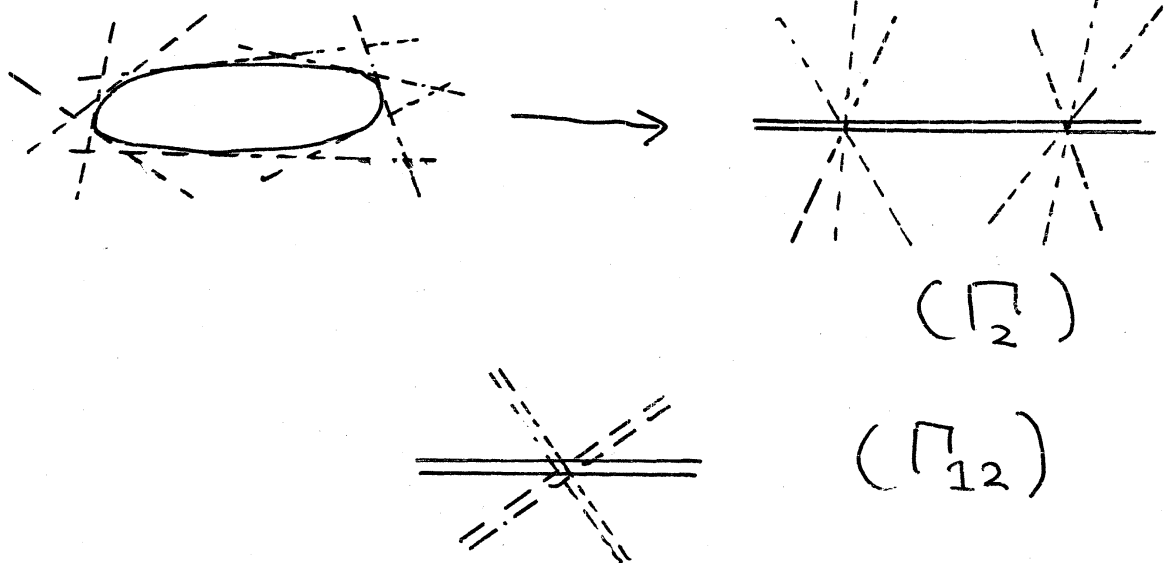
Charles の Idea.

Steinerの論法の難点を克服するために、Charles は退化した2次曲線に対してその双対曲線がどうなるかを考えた。

すなわち、 $X = \{(C, \gamma); C \text{ は n.s. conic, } \gamma \text{ は } C \text{ の接線のなす2次曲線}\}$ と考え、 X の $\mathbb{P}^5 \times \mathbb{P}^5$ 内での束包を \bar{X} とした時に、 \bar{X} をパラメータ空間と考える。

\bar{X} 内の SL_3 -orbitsは X を除いて3つあり、次の図で表わされるものになる。(実線は C 、破線は γ を表わす。)





\bar{X} について 2 次 の 性 質 が 知 ら れ て い る。

- i) complete であること。(Study)
- ii) smooth であること。(Vander Waerden)
- iii) π_1, π_2 が smooth で, π_1 と π_2 が π_{12} で 横 断 的 に 交 わ っ て い る こと。(Severi)

以下では \bar{X} について 2 次 の 事 を 使 う。

$$\begin{array}{c}
 \mathbb{P}^5 \times \check{\mathbb{P}}^5 \\
 \cup \\
 \bar{X} \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{P}^5 \\
 \pi_2 \downarrow \\
 \check{\mathbb{P}}^5
 \end{array}$$

$\mathbb{P}^5, \check{\mathbb{P}}^5$ の 超 平 面 の π_1, π_2 に よ る pull-back を L_1, L_2 と する。

- i) L_1, L_2 は $\text{Pic}(\bar{X}) \cong \mathbb{Z}^2$ の base になる。
 ii) $\nu \equiv [L_1] \in H^2(\bar{X}; \mathbb{Z})$, $\mu \equiv [L_2] \in H^2(\bar{X}; \mathbb{Z})$ とおけば, ν は conic がある点を通るという条件, として μ は conic がある直線に接するという条件を表わす。
 iii) γ を「ある二次曲線に接する」という条件, 定めるスホモロジ-類とすれば, $\gamma = 2\nu + 2\mu$ となる。

S_{C_i} の \bar{X} 内での包を \hat{S}_{C_i} で表わせば, $\bigcap_{i=1}^5 \hat{S}_{C_i}$ は有限集合である。Poincaré duality によ, γ , 重複度もこめた $\bigcap_{i=1}^5 \hat{S}_{C_i}$ の個数は,

$$\begin{aligned} \gamma^5[\text{pt}] &= 2^5 (\mu^5 + 5\mu^4\nu + 10\mu^3\nu^2 + 10\mu^2\nu^3 \\ &\quad + 5\mu\nu^4 + \nu^5) \\ &= 2^6 (\nu^5 + 5\nu^4\mu + 10\mu^2\nu^3) \\ &= 2^6 (1 + 5 \times 2 + 10 \times 4) = 3264 < 6^5 \end{aligned}$$

これが Charles の解答であ, γ , 実は正しい。

すべての数え上げ問題は \bar{X} でとけるか?

答は残念ながら No! であ, γ , 次の Severi の例が存在する。
 Π を二次曲線の generic な net とする。

$S = \{ \text{n.s. conics で } \Pi \text{ の元と 4 重接触をするものの全体} \}$

とすれば, 常に S の \bar{X} での閉包 \bar{S} は \bar{X} の closed SL_3 -orbit を含む。

(かしながら, conico の場合には必ずこの数え上げ問題が与けるような Intersection Theory が存在する。

その候補者を次の様に一般に定義する。

G : \mathbb{C} 上の連結代数群。

H : G の閉代数部分群。 $X = G/H$ 。 $n = \dim X$ 。

$\Sigma^h(X)$: X 上の次元 h のサイクルのなす自由加群。

Pairing

$$\Sigma^h(X) \times \Sigma^{n-h}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

を Kleiman の Lemma により,

V^h, W^{n-h} : X の h 次元, $n-h$ 次元部分多様体。

$$\langle [V], [W] \rangle = \#(V \cap gW) \quad (g \text{ は } G \text{ の generic element})$$

として定義する。

$B^h(X) = \Sigma^h(X)$ の $\Sigma^{n-h}(X)$ に対する直交部分空間。

$$C^h(X) = \Sigma^h(X) / B^h(X)。$$

$C^*(X) = \bigoplus C^h(X)$ が Intersection theory の候補者があるが, 一般には, $C^*(X)$ は Intersection product によって環にならない。

例 $G = \mathbb{C}^3$ (加法群) $H = \{0\}$ とすれば,
 $V = \{xy = z\}$, $W = \{x = 1\}$ とすれば,
 $[V \cap_g W]$ は $C^1(\mathbb{C}^3)$ の中で違う類を表現する。

しかしながら, conics を含む次の場合には, $C^*(G/H)$ を特徴づけることができ, $C^*(G/H)$ が well-defined な積構造をもつことがわかる。

G : 半単純 adjoint 代数群 / \mathbb{C} .

H : G の involution の fixed pt set.

$\mathfrak{g} = \text{Lie } G$, $\mathfrak{h} = \text{Lie } H$ とすれば, \mathfrak{h} は $\text{Grass}(\mathfrak{g})$ の元である。 $\bar{X} = \mathfrak{h}$ の G -orbit の $\text{Grass}(\mathfrak{g})$ の中での閉包。

$$C^*(G/H) \cong \varprojlim_{X'} H^*(X'; \mathbb{Z})$$

ここで, X' は \bar{X} を, 被約 G -不変部分多様体になり, 2 何回か blowing up したものである。

文献

1. De Concini - Procesi

Complete Symmetric Varieties I

Springer L.N.M. no. 996. pp. 1~44.

2. S. Kleiman

The transversality of a general translate.

Compositio Math. 28. (1974) p. 287 ~ 297

3. H. Schubert

Kalkül der Abzählenden Geometrie

Springer, reprint 1979

(宇澤達 記)